

# 计数原理、排列、组合

## 1、基本原理

### (1) 分类计数原理（加法原理）

完成一件事，有  $n$  类办法，第一类方法有  $m_1$  种，第二类方法有  $m_2$  种，... 第  $n$  类方法有  $m_n$  种，那么完成这件事共有  $N = m_1 + m_2 + \dots + m_n$  种不同的方法。

### (2) 分步计数原理（乘法原理）

完成一件事，需要分成  $n$  个步骤，做第一步的方法有  $m_1$  种，做第二步的方法有  $m_2$  种，... 做第  $n$  步的方法有  $m_n$  种，那么完成这件事共有  $N = m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n$  种不同的方法。

例 1. 甲校有 4 名学生，乙校有 6 名学生，丙校有 5 名学生分别获得市数学竞赛一等奖。

(1) 从中任选 1 名学生参加全国决赛，有多少种不同的选法；

(2) 从 3 个学校获一等奖的学生中各选 1 名学生参加全国决赛，有多少种不同的选法。

## 2. 排列

(1) **排列**: 从  $n$  个不同的元素中，任取  $m$  ( $m \leq n$ ) 个元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从  $n$  个元素中取  $m$  个元素的排列。

特别地: 当  $m = n$  时，上述排列叫做  $n$  个不同的元素的一个全排列。

(2) **排列数**: 从  $n$  个不同的元素中，任取  $m$  ( $m \leq n$ ) 个元素的所有排列的个数叫做从  $n$  个元素中取  $m$  个元素的排列数，记作  $A_n^m$ 。

(3) 排列数公式:  $A_n^m = \underline{\hspace{2cm}}$  或  $\underline{\hspace{2cm}}$

特别地:  $A_n^n = \underline{\hspace{2cm}}$  (规定:  $0! = 1$ )

例 2. 从 1, 2, 3, 4 这 4 个数中选取 3 个数字可组成多少个三位数?

### 3. 组合

(1) **组合**: 从  $n$  个不同的元素中, 任取  $m$  ( $m \leq n$ ) 个元素并成一组, 叫做从  $n$  个元素中取  $m$  个元素的一个组合。

(2) **组合数**: 从  $n$  个不同的元素中, 任取  $m$  ( $m \leq n$ ) 个元素的所有组合的个数, 叫做从  $n$  个不同的元素中取出  $m$  个元素的组合数, 记作  $C_n^m$ 。

(3) 组合数公式:  $C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$ 。

规定:  $C_n^0 = 1$

(4) 组合数的性质:  $C_n^m = C_n^{n-m}$ ;  $C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$ 。

例 3. 计算  $\frac{A_6^3 - C_5^3 + C_{100}^{99}}{A_3^3 + A_4^4}$

例 4. 从包含甲的若干名同学中选出 4 名分别参加数学、物理、化学和英语竞赛, 每名同学只能参加一科竞赛且任 2 名同学不能参加同一学科竞赛, 若甲不参加物理和化学竞赛, 则共有 72 种不同的参赛方法, 一共有多少名同学参赛?

例 5. 用 0 到 9 这十个数字,

- (1) 可以组成多少个没有重复数字的三位数?
- (2) 没有重复数字的三位数中有多少个偶数?
- (3) 没有重复数字的三位数中有多少个奇数?

例 6. 4 名男生和 5 名女生站成一排.

- (1) 甲不在中间也不在两端的站法有多少种?
- (2) 甲、乙两人必须站在两端的站法有多少种?
- (3) 男、女分别排在一起的站法有多少种?
- (4) 男、女相间的站法有多少种?
- (5) 甲、乙、丙三人从左到右顺序一定的站法有多少种?

例 7. 在 100 件产品中, 有 98 件合格品和 2 件次品, 从这 100 件产品中任意抽出 3 件,

- (1) 一共有多少种不同的抽法?
- (2) 抽出的 3 件中恰好有 1 件是次品的抽法有多少种?

例 8. 某志愿小组有 15 名志愿者, 其中正、副组长各 1 名, 现在选派 5 名志愿者去参加一项活动,

- (1) 如果正组长和副组长必须在内, 有多少种选派法?
- (2) 如果正组长和副组长必须有一人而且只能有一人在内, 有多少种选派法?
- (3) 如果正组长和副组长都不在内, 有多少种选派法?
- (4) 如果正组长和副组长至少有一人在内, 有多少种选派法?

例 9. 12 人分坐 4 排，每排 3 人，其中 1 人必须坐第一排，另外 2 人必须坐第三排，共有多少种做法？

例 10. 按下列要求分配 6 本不同的书，各有多少种不同的分配方式？

- (1) 分成三份，1 份 1 本，1 份 2 本，1 份 3 本.
- (2) 甲、乙、丙三人中，一人得 1 本，一人得 2 本，一人得 3 本.
- (3) 平均分成三份，每份 2 本.
- (4) 平均分配给甲、乙、丙三人，每人 2 本.
- (5) 分成三份，1 份 4 本，另外两份每份 1 本.
- (6) 甲、乙、丙三人中，一人得 4 本，另外两人每人得 1 本.
- (7) 甲得 1 本，乙得 1 本，丙得 4 本.

### 排列与组合课后作业

- 1、6 把椅子摆成一排，3 人随机就坐，任何两人不相邻的做法种数为 ( )  
A、144                      B、120                      C、72                      D、24
- 2、六个人从左到右排成一行，最左端只能排甲或乙，最右端不能排甲，则不同的排法共有 ( )  
A、192                      B、216                      C、240                      D、288
- 3、3. 满足  $a, b \in \{-1, 0, 1, 2\}$ ，且关于  $x$  的方程  $ax^2 + 2x + b = 0$  有实数解的有序实数对  $(a, b)$  的个数为 ( )  
A、14                      B、13                      C、12                      D、10
- 4、用 0, 1, ..., 9 十个数字可以组成有重复数字的三位数的个数为 ( )  
A、243                      B、252                      C、261                      D、279
- 5、将 2 名教师，4 名学生分成 2 个小组，分别安排到甲、乙两地参加社会实践活动，每个小组有 1 名教师和 2 名学生组成，不同的安排方法共有 ( )  
A、12                      B、10                      C、9                      D、8

6、若从  $1, 2, 3, \dots, 9$  这 9 个整数中同时取 4 个不同的数，其和为偶数，则不同的取法共有 ( )

A、60                      B、63                      C、65                      D、66

7. 将序号分别为 1, 2, 3, 4, 5 的 5 张参观券全部分给 4 人，每人至少 1 张，如果分给同一个人的两张参观券连号，那么不同的分法种数是\_\_\_\_\_.

8. 将 A, B, C, D, E, F 六个字母排成一排，且 A, B 均在 C 的同侧，则不同的排法共有\_\_\_\_\_种. (用数字作答)

9. 由 1, 2, 3, 4, 5, 6, 这 6 个数字可以组成多少个数字不重复且是 6 的倍数的五位数?

10. 3 封不同的信，有 4 个信箱可供投递，共有多少种投信的方法?

11. 从 1, 3, 5, 7, 这 4 个数字中任取 3 个，从 0, 2, 4 这 3 个数字中任取 2 个，可以组成多少个无重复数字的五位数?

12. 某次联欢会要安排 3 个歌舞类节目，2 个小品类节目和一个相声类节目的演出顺序，则同类节目不相邻的排法种数是 ( )

A、72                      B、120                      C、144                      D、168

13、将 5 名志愿者分配到 3 个不同的奥运会场馆参加接待工作，每个场馆至少分配一名志愿者的方案数为 ( )

A、540                      B、300                      C、180                      D、150

14、4 男 3 女共 7 名同学按下列要求站成一排，分别有多少种不同的做法?

- (1) 男生不站在正中间，女生不站在两端；
- (2) 3 名女生排在一起且女生不站在两端；
- (3) 3 名女生不排在一起；
- (4) 3 名女生各不相同；
- (5) 3 名女生各不相同且男生甲不排在排头和排尾.

## 历年排列与组合联考真题

- 1.(2016)从 1,2,3,4,5,6 中任取 3 个不同的数相加,则不同的结果共有 ( )  
A.6 种            B.9 种            C.10 种            D.15 种
- 2.(2015)设集合  $A \subseteq \{1,2,3,4\}$ ,若 A 至少有 3 个元素,则这样的 A 共有 ( )  
A.2 种            B.4 种            C.5 种            D.7 种
- 3.(2014) $(x - \sqrt[3]{2})^9$  的展开式中  $x^3$  的系数是 ( )  
A.336            B.168            C.-168            D.-336
- 4.(2013)3 位男同学与 4 位女同学排成一列,其中女同学相邻的不同排法共有 ( )  
A.48 种            B.36 种            C.24 种            D.18 种
- 5.(2012)设集合 M 含有 10 个元素,那么 M 的真子集中,至少含有 8 个元素的共有  
A.56 个            B.55 个            C.46 个            D.45 个
- 6.(2010)用数字 1,2,3,4,5,6 组成的没有重复数字的 6 位数中,数字 1,2,相邻且 3,4,不相邻的 6 位数共有 ( )  
A.72 个            B.144 个            C.216 个            D.288 个
- 7.(2008)一个正五棱柱有 10 个顶点,以其中的 4 点为顶点的不同三棱锥,总共有 \_\_\_\_\_ 个.
- 8.(2007)用 0,1,2,3,4 组成没有重复数字的 5 位数,其中的奇数共有 ( )  
A.60 个            B.48 个            C.36 个            D.24 个
- 9.(2007)二项式  $(\frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{x}})^6$  展开式中的常数项是\_\_\_\_\_.
- 10.(2006)用 0,1,2,3,4,5 组成没有重复数字的 6 位数,能被 25 整除的共 ( )  
A.60 个            B.42 个            C.30 个            D.21 个
- 11.(2005)在三位正整数中,能被 3 整除的偶数共有 ( )  
A.299 个            B.298 个            C.150 个            D.149 个
- 12.(2005)用 5 个彼此不同的实数,排成数列  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ , 要求  $a_1 < a_2 < a_3$  且  $a_3 > a_4 > a_5$ , 则满足要求的不同数列最多有 \_\_\_\_\_ 个