

2021 年中华人民共和国普通高等学校联合招收
 华侨、港澳地区及台湾省学生入学考试
 数学试卷

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{x | -1 < x < 4\}$, $B = \{x | 2 < x < 5\}$, 则 $A \cup B =$ ()
- A. $\{x | -1 < x < 4\}$ B. $\{x | -1 < x < 5\}$
- C. $\{x | 2 < x < 4\}$ D. $\{x | 2 < x < 5\}$
2. 复数 $z = \frac{2-i}{2+i}$ 的共轭复数 $\bar{z} =$ ()
- A. $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$ B. $\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$ C. $\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$ D. $\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$
3. 函数 $y = \log_2(1-x^2)$ 的单调递减区间是 ()
- A. $(-\infty, 0)$ B. $(0, +\infty)$ C. $(-1, 0)$ D. $(0, 1)$
4. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_2 - a_5 + a_8 - a_{11} + a_{14} = 1$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 15 项的和为 ()
- A. 1 B. 8 C. 15 D. 30
5. 已知 $\tan x = 2$, 则 $\frac{2 \sin x + \cos x}{2 \sin x - \cos x} =$ ()
- A. 3 B. $\frac{5}{3}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{1}{3}$
6. 已知向量 $\vec{a} = (\cos \theta, \sin \theta)$, $\vec{b} = (3, -4)$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 的最大值是 ()
- A. 7 B. 5 C. 4 D. 1
7. 下列函数为偶函数的是 ()
- A. $y = \lg(x-1) + \lg(x+1)$ B. $y = |\sin x + \cos x|$
- C. $y = x^{\frac{1}{3}}$ D. $y = (x+2)^2 + (2x-1)^2$

8. 已知点 P 在圆 $(x+1)^2 + y^2 = 2$ 上, 则 P 到直线 $x+y-5=0$ 距离的最小值为 ()
- A. $\sqrt{2}$ B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $3\sqrt{2}$
9. 已知 $a > b > 1$, 则以下四个数中最大的是 ()
- A. $\log_b a$ B. $\log_{2b} 2a$ C. $\log_{3b} 3a$ D. $\log_{4b} 4a$
10. 3 位男同学与 3 位女同学随机排成一行, 其中两端都不是女同学的概率为 ()
- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{1}{6}$
11. 设 α, β 是两个平面, 直线 l 与 α 垂直的一个充分条件是 ()
- A. $l // \beta$ 且 $\alpha \perp \beta$ B. $l \perp \beta$ 且 $\alpha \perp \beta$
- C. $l \subset \beta$ 且 $\alpha \perp \beta$ D. $l \perp \beta$ 且 $\alpha // \beta$
12. 函数 $y = \cos^2 x + \sin x \cos x$ 图像的对称轴是 ()
- A. $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} (k \in \mathbb{Z})$ B. $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8} (k \in \mathbb{Z})$
- C. $x = k\pi + \frac{\pi}{4} (k \in \mathbb{Z})$ D. $x = k\pi - \frac{\pi}{4} (k \in \mathbb{Z})$

二、填空题: 本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

13. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 过 F 倾斜角为 45° 的直线与 C 交于 A, B 两点, 且 $|AB| = 8$, 则 $p =$ _____
14. 函数 $f(x) = \sqrt{2^{x+1} - 4^x}$ 的定义域是 _____
15. 曲线 $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$ 在点 $(-2, 3)$ 处的切线方程是 _____
16. 已知函数 $f(x) = ax^3 + bx + c \sin x - 2$, 且 $f(-2) = 8$, 则 $f(2) =$ _____
17. 三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 底面 ABC , 且 $PA = 3$, $AB = CB = 2$, $AC = 2\sqrt{2}$, 则侧面 PBC 的面积是 _____
18. 双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 P 在直线 $x - y - 10 = 0$ 上, 则 $|PF_1| + |PF_2|$ 的最小值为 _____

四、解答题：本大题共 4 小题，每小题 15 分，共 60 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

19. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $a = 2\sqrt{6}$, $b = 3$,

$$\sin^2(B+C) + \sqrt{2} \sin 2A = 0, \text{ 求 } c \text{ 及 } \cos B.$$

20. 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $S_{n+1} = 3S_n + 2n + 4$, 且 $a_1 = 4$

(1) 证明: $\{a_n + 1\}$ 也是等比数列;

(2) 求 S_n .

21. 已知函数 $f(x) = x^2 - 6x + 4 \ln x + m$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间; (2) 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f(x) > 0$, 求 m 的取值范围.

22. 设椭圆 $G: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 与 y 轴正半轴的交点为 B , 右焦点为 F , 已知 B, F

在 $\odot C: x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ 上.

(1) 求 G 的方程;

(2) 若直线 l 过点 C , 交 G 于 M, N 两点, 且 C 为线段 MN 的中点, 求 $|MN|$.